

## **Spatial Problem Solving with Paper Folding and Cutting**

### **Amerikanisches Unterrichtsmaterial zur Anbahnung des räumlichen Denkens**

Räumliches Vorstellungsvermögen ist für den Menschen bedeutsam. Nicht nur bei der Umsetzung gezeichneter Bastelanleitungen oder dem Aufbau einer Spülmaschine nach der bildlich gestalteten Bedienungsanleitung, auch beim Abschätzen von Wegstrecken, während des Überholens oder bei der Planung eines Umzugs wird das räumliche Vorstellungsvermögen gefordert.

»Raumvorstellung kann umschrieben werden als die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken. Sie geht über die räumliche Wahrnehmung durch die Sinne hinaus, indem sie nicht nur ein Registrieren der Sinneseindrücke, sondern ihre gedankliche Verarbeitung voraussetzt« (Wölpert 1983, 9).

Raumvorstellung beschreibt demnach die Fähigkeit, mit Gegenständen geistige Operationen durchführen zu können. Eine notwendige Voraussetzung für die Raumvorstellung ist die visuelle Wahrnehmung, die sich in fünf Teilbereiche gliedert. Für die von uns beschriebene Unterrichtseinheit ist der Teilbereich der Figur-Grund-Diskrimination von grundlegender Bedeutung, das heißt, die Kinder müssen eine Teilfigur aus einer komplexeren Figur erkennen und isolieren können.

Mit Beginn der Grundschulzeit ist die Entwicklung der visuellen Wahrnehmung überwiegend abgeschlossen. Die Entwicklung der Raumvorstellung findet deutlich später statt.

»Nach Angaben von S. Bloom (1971) »sind bis zum 9./10. Lebensjahr rund 50% und bis zum 12.-14. Lebensjahr rund 80% der Raumvorstellungsfähigkeit (gemessen an den Leistungen von Erwachsenen) entwickelt« (ebd., 11). Deshalb ist es wichtig, dieses Ziel immer wieder in der Grundschulzeit zu verfolgen.

### **Material**

Die Unterrichtsidee zum Material *Spatial Problem Solving* hat ihren Schwerpunkt in der Anbahnung und der Förderung des räumlichen Denkens. Räumliches Denken als ein Subfaktor der Raumvorstellung ist nach Besuden »die Fähigkeit mit Vorstellungsinhalten gedanklich zu operieren, das heißt ihre Lage bzw. Beziehungen zueinander in der Vorstellung zu verändern« (Radatz/Rickmeyer 1991, 17).

Das amerikanische Buch *Spatial Problem Solving with Paper Folding and Cutting* (Davidson/Willcut 1984) ist eine Sammlung von Aufgabenstellungen zum Papierfalten, die zunehmend komplexer werden. Faltfiguren werden in Beziehung zu ihren Gesamtfiguren gesetzt und umgekehrt. Im Verlauf des Buches wird die Anzahl der Symmetrieachsen einer Figur erhöht. Für den Einsatz im Unterricht der Grundschule haben wir uns auf die Aufgabenstellungen zu einer Faltlinie beschränkt. Dass bereits diese Aufga-

in: Krauthausen, G./Scherer, P. (2004, Hg.): *Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik*. Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut

ben anspruchsvoll sind, bemerken Sie, wenn Sie sie selbst lösen. Dieses ist aus zwei Gründen sinnvoll: sowohl zum besseren Verständnis des weiteren Textes, als auch zur Vorbereitung auf den Unterricht. Bei der hier vorgestellten Unterrichtseinheit für ein 3. bzw. ein 4. Schuljahr haben wir zudem auf zwei Aufgabenstellungen verzichtet: Eigene Muster schneiden bzw. von vorgegebenen Falzfiguren ausgehend Gesamtfiguren zeichnen. Wir setzen voraus, dass derartige Aufgabenstellungen schon vor dem dritten Schuljahr stattgefunden haben. Die unter diesen Gesichtspunkten ausgewählten Aufgaben stellen bezüglich des räumlichen Vorstellungsvermögens unterschiedliche Ansprüche an die Kinder:

<b>AB 1</b>	Finde die Faltlinie	Die Kinder müssen eine Figur <sup>1</sup> in zwei spiegelgleiche Teilfiguren zerlegen können.
<b>AB 2</b>	Finde die passende Falzfigur	Die Kinder müssen eine Teilfigur erkennen, sie gedanklich an der gegebenen Faltlinie spiegeln und dann mit der Gesamtfigur vergleichen.
<b>AB 3</b>	Welche Figuren gehören zusammen?	Die Kinder müssen Falzfiguren den Gesamtfiguren zuordnen. (Für diese Aufgabenstellung genügt die Fähigkeit der Figur-Grund-Diskrimination.)
<b>AB 4</b>	Finde die passende Falzfigur	AB 4 hat die gleiche Aufgabenstellung und Zielsetzung wie AB 2. Es gibt jedoch Figuren mit zwei Symmetrieachsen und daher auch Aufgabenstellungen mit mehreren Lösungsmöglichkeiten. Ebenfalls findet sich eine Aufgabenstellung, die keine Lösung hat.
<b>AB 5</b>	Finde das passende Muster	Die Kinder müssen eine Teilfigur gedanklich an der gegebenen Faltlinie spiegeln und dann mit der Gesamtfigur vergleichen.
<b>AB 6</b>	Welche Figuren gehören zusammen?	Vergleiche AB 3.
<b>AB 7</b>	Finde das passende Muster	Die Kinder müssen eine Teilfigur gedanklich an der gegebenen Faltlinie spiegeln und dann mit der Gesamtfigur vergleichen. Dieses AB unterscheidet sich insofern von AB 5, dass die Figuren komplexer sind und eine Aufgabenstellung keine Lösung hat.
<b>AB</b>	Welche	Die Kinder müssen zwei Teilfiguren gedanklich an der gegebenen

<sup>1</sup> Die Bezeichnung *Figur* meint an dieser Stelle die *Gesamtfigur* in Abgrenzung zu dem Begriff *Teilfigur*. Im Weiteren verwenden wir die Begriffe *Gesamtfigur* und *Muster* synonym. Gegenüber den Kindern haben wir den Begriff *Muster* bevorzugt.

<b>8</b>	Faltfiguren gehören zu demselben Muster?	Faltlinie spiegeln und die im Kopf entstandenen Gesamtfiguren miteinander vergleichen. Die Gesamtfiguren haben z.T. zwei Spiegelachsen. In diesem Fall konnte jeweils eine vertikale und eine horizontale Teilfigur abgebildet werden.
----------	------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Die Kopiervorlagen am Ende dieses Beitrags zeigen alle Aufgabentypen. Der Umfang der Aufgaben musste allerdings aus Platzgründen reduziert werden.

Für AB 1-4 ist die Ausgangsfigur die Gesamtfigur, während bei den Arbeitsblättern 5-8 von der Teilfigur ausgegangen wird.

AB 1, 3 und 6 bilden eine gute Kontrolle für die Lehrerin, ob die Kinder die Grundlagen der visuellen Wahrnehmung beherrschen. Beim letzten Arbeitsblatt ist der Anspruch an das räumliche Denken enorm hoch. Die Kinder, die dazu noch nicht in der Lage sind, sollten nicht nur zur Kontrolle, sondern auch schon zum Bearbeiten einen Spiegel als Hilfsmittel bekommen.

Voraussetzung für die Unterrichtseinheit ist also, dass die Kinder bereits aktive Übungen zur visuellen Wahrnehmung gemacht, den Umgang mit dem Spiegel geübt und eigene Faltfiguren hergestellt haben.

### Mögliche Unterrichtseinheit

Eine mögliche Unterrichtseinheit gliedert sich in drei Phasen, wobei sich die einzelnen Phasen auf bis zu zwei Unterrichtsstunden erstrecken können:

**1. Phase:** Die Begriffe Faltlinie, Faltfigur und Muster werden geklärt. Es wird verabredet, wann und wie der Spiegel als Hilfs- bzw. Kontrollmittel eingesetzt werden kann. Die Kinder bearbeiten die Arbeitsblätter 1-4. Je nach Klassenstärke und Raumkapazität bieten sich Stationsarbeit oder Angebotskästen an einem zentralen Ort an. (Bei Stationsarbeit sollte die Lehrerin die Arbeitsaufträge von den Kopiervorlagen abtrennen, damit die Kinder auch wirklich ihre Stationen wechseln müssen.)

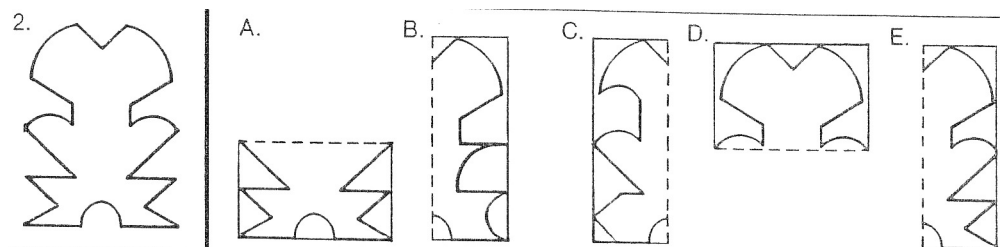
**2. Phase:** Die Kinder bearbeiten die Arbeitsblätter 5-8. Für eine Reflexion dieser beiden Phasen kann man das AB 2 auf Folie ziehen und Zusatzfragen an die Bearbeitung anfügen, damit die Kinder zunehmend lernen, auch solche schwierigen geometrischen Sachverhalte zu verbalisieren.

Ein Beispiel zur Faltfigur 2.D: Warum ergibt sich beim Aufklappen nicht das vorgegebene Muster (obwohl die abgebildete Teilfigur zum Muster gehört)?<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Mögliche Antwort: Das vorgegebene Muster hat nur eine *senkrechte* Faltlinie, die Teilfigur zeigt jedoch die obere Hälfte des Musters.

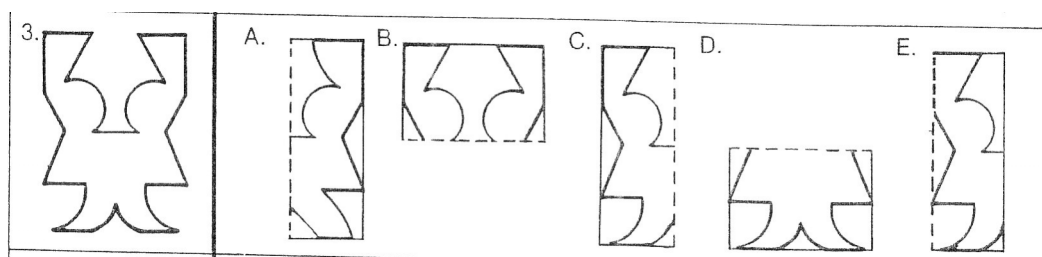
in: Krauthausen, G./Scherer, P. (2004, Hg.): *Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik*. Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut

Spiegel. Donauwörth: Auer S. 47 – 56



Arbeitsblatt 2 – Teil 2

Ein weiteres Beispiel: 3.E ist Teilfigur des gegebenen Musters und ihre Faltlinien verlaufen in derselben Richtung. Warum ergibt sich beim Aufklappen nicht das vorgegebene Muster?<sup>3</sup>



Arbeitsblatt 2 – Teil 3

Für besonders sichere oder schnelle Kinder kann man die Zusatzfragen auch auf einem Arbeitsblatt einreichen und als Vorbereitung auf die Reflexion die Erklärung schriftlich fordern.

**3. Phase:** Die Kinder erstellen analog zu den Arbeitsblättern 3, 6 oder 8 eigene Arbeitsblätter, die sie gegenseitig bearbeiten können.

### Erfahrungsbericht

In einer 4. Klasse wurden zunächst die Begriffe Faltlinie, Muster und Faltfigur mit Demonstrationsmaterial an der Tafel eingeführt. Anschließend wurde der grundsätzliche Aufbau der Arbeitsblätter vorgestellt, nämlich dass immer zusammengehörende Dinge gefunden werden müssen: passende Muster zu Faltfiguren bzw. Faltfiguren zu passenden Mustern oder auch zusammengehörende Faltfiguren. An einem konkreten Beispiel wurde die Aufgabenstellung erläutert und Begründungen für die Lösung von den Kindern gefordert. In dieser Klasse konnten keine Gruppentische gestellt werden. Deshalb standen im weiteren Verlauf sämtliche Arbeitsblätter in Ablagekästen auf der Fensterbank. Zusätzlich befand sich bei jedem Ablagekasten ein laminiertes Arbeitsauftrag mit Lösungstipp<sup>4</sup>, sowie ein rotes Kontrollblatt, das den Kindern nach der Bearbeitung zugänglich war. Die Kinder konnten sich Spiegel als Hilfsmittel nehmen, wurden aber nicht dazu aufgefordert. Sie mussten also vier Arbeitsschritte in folgender Reihen-

<sup>3</sup> Mögliche Antwort: Die Faltlinie ist an der falschen Seite der Faltfigur.

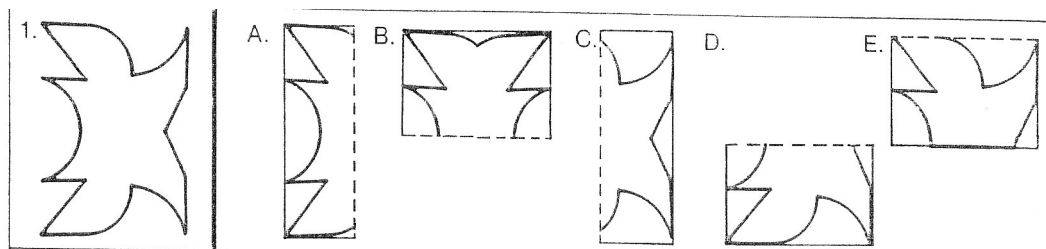
<sup>4</sup> Diese Tipps (z.B. »Eine Aufgabe hat keine Lösung.« oder »Ein Lösungsbuchstabe kommt doppelt vor.«) können nicht auf die reduzierten Arbeitsblätter am Ende dieses Beitrags übertragen werden.

folge durchlaufen: Aufgabenstellung lesen und verstehen, Arbeitsblatt bearbeiten (ggf. mit Hilfe des Spiegels), kontrollieren und erledigte Arbeitsblätter abheften.

Die Kinder arbeiteten überwiegend zu zweit zusammen und zeigten sich dabei sehr motiviert. Besonders auffällig war die unterschiedliche Bearbeitungsdauer einzelner Kinder zu dem gleichen Arbeitsblatt. Während sich Mona und Christine 20 Minuten am Arbeitsblatt 1 aufhielten, um eine möglichst gute und ihren Ansprüchen genügende Lösung abliefern zu können, erledigten David und Jan die gleiche Aufgabe in einem Drittel der Zeit.

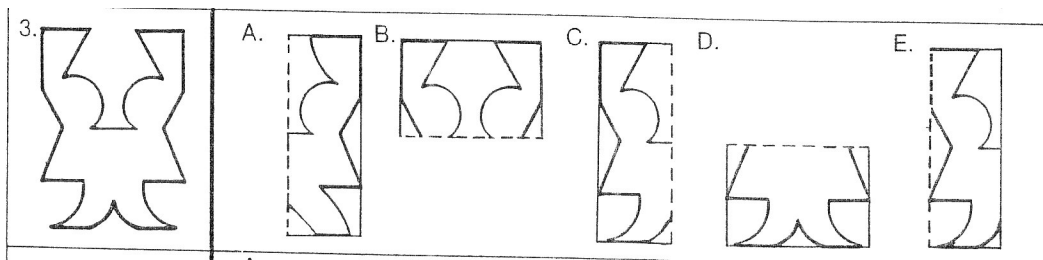
Im Verlauf dieser ersten Phase griffen zunehmend mehr Kinder auf den Spiegel als Hilfsmittel zurück. Sie wollten sich ihrer Leistung vergewissern, bevor sie das Kontrollblatt zu Rate zogen. Der Spiegel konnte aber nicht bei allen Kindern unmittelbar helfen. Lisa und Michelle wussten zunächst nicht, wo sie den Spiegel anlegen sollten. Eva erklärte es ihnen. Trotzdem wussten die beiden nicht, welche Bedeutung das so erhaltene Muster (Spiegelbild) für ihre Lösung hatte. So sahen sie beispielsweise bei Arbeitsblatt 1 jedes Mal im Spiegel eine symmetrische Figur, verglichen dieses Bild aber nicht mit dem vorgegebenen. Lisa und Michelle konnten erst dann fruchtbar weiterarbeiten, nachdem ihnen erklärt worden war, wie der Spiegel als Hilfe benutzt werden konnte. Dieses Problem kann man mit einem halbdurchlässigen Spiegel umgehen, bei dem ausschließlich die symmetrischen Figuren deckungsgleiche Hälften (Original- und im Spiegel zu sehende Hälfte) aufweisen.

Aufgrund häufiger Nachfragen zu den Arbeitsblättern 2 und 8 begann die zweite Phase der Unterrichtseinheit mit einer Reflexion derselben.



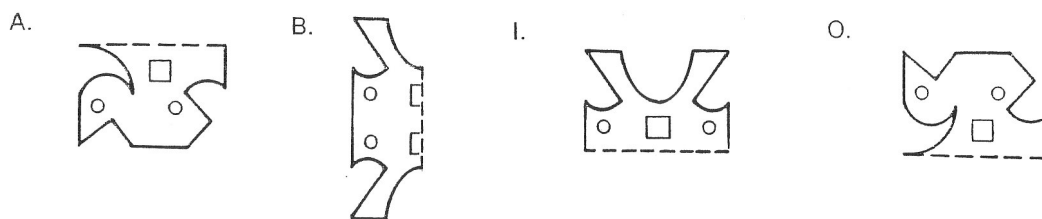
Arbeitsblatt 2 – Teil 1

So begründete Matthieu, dass A die falsche Lösung ist, weil »beim Klappen dann alles wie links ist.« Rene erklärte, dass bei E die »Faltlinie nicht beachtet« sei. Lisa erkannte D als die richtige Lösung, »weil man das hochklappen kann und das dann wie vorne ist.« Diese Formulierungen wirkten noch sehr unbeholfen. Deshalb war es notwendig, immer wieder auf sprachliche Begründungen zu drängen. Beim zweiten Beispiel drückten sich die Kinder sofort viel genauer aus.



Arbeitsblatt 2 – Teil 3

Luis sagte: »Bei E ist die Spiegellinie wieder an der falschen Seite.«, und Jan ergänzte: »C ist richtig. Das stimmt, auch mit Spiegellinie.« Mona interpretierte das vorgegebene Muster figürlich und begründete die falsche Lösung A so: »Der Hut ist oben rund statt gerade und die Füße sind unten nicht nach außen.«



Arbeitsblatt 8

Beim Arbeitsblatt 8 war für alle Kinder klar, dass A und O zusammenpassen. Bei B und I war diese Tatsache nicht so eindeutig. Jan: »Die passen nicht. Beim Klappen kriegst du nur einen Kasten und zwei Punkte.« Lisa widersprach: »Doch, die Bögen oben bei I sind wie bei B oben und unten.« Eva erläuterte ihre Vorgehensweise: »Du kannst I senkrecht in der Mitte teilen und so verschieben, dass B rauskommt.« Nachdem sie ihre Begründung am Overheadprojektor demonstrierte, benutzten im weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit zahlreiche Kinder ihre Strategie. Evas Erklärung motivierte die Kinder zudem, auf den Spiegel als Hilfsmittel zu verzichten.

Die Reflexion half nicht nur, geometrische Sachverhalte zu verbalisieren, sondern ermöglichte den Kindern auch die Sicht auf andere Lösungsstrategien. Für Jan und David ergab sich aus der Reflexion ein differenzierter Arbeitsauftrag. Da sie innerhalb der ersten Unterrichtsstunde bereits die Hälfte der Arbeitsblätter gelöst hatten, wurden sie nun dazu angehalten, ihre Lösungen sprachlich zu begründen. »Das passt.«, war nicht immer eine befriedigende Antwort, selbst wenn auf die entsprechenden Teilfiguren verwiesen werden konnte. Die Fehlversuche konnten präziser erklärt werden. »Das kann nicht gehen, weil die Faltnie ist auf der falschen Seite.«

Die Schwierigkeiten in der dritten Phase, bei der Erstellung eigener Arbeitsblätter, lagen häufig im unzureichenden Leseverständnis der Kinder. So nahm Christian nur ein Blatt zum Falten, Anna notierte keine Lösungen auf der Rückseite und Niklas wusste sein Blatt nicht zu strukturieren. Daniels Schneidemuster zerfiel in vier Teile, weil er

die Faltlinien abschnitt. Solche Fehlversuche hielten die Kinder aber nicht davon ab, hartnäckig an der Erstellung ihrer eigenen Aufgabenblätter zu arbeiten.

In der folgenden Stunde bearbeiteten die Kinder gegenseitig ihre selbst erstellten Arbeitsblätter und beschlossen, diese am letzten Schultag ihren Eltern zur Bearbeitung vorzulegen. Dieser Vorschlag zeigt, dass sie die Arbeitsblätter für sehr schwierig hielten. Was Kinder und Erwachsene im Einzelnen lernen können, drückten die Kinder so aus:

- □ »*Figuren teilen und die Spiegellinie erkennen.*« (Michelle)
- □ »*Dass manche Figuren auch zwei Spiegellinien haben.*« (David)
- □ »*Ganz genau auch die Kleinigkeiten angucken und mit dem Muster vergleichen.*« (Matthieu)
- □ »*Alleine [gemeint ist: ohne Lehrerin] zu kontrollieren und selbstständig damit zu arbeiten.*« (Lisa, die mit dieser Aussage sogar ein übergeordnetes allgemeines Lernziel anspricht)

In einer anderen 4. Klasse, in der diese Unterrichtsreihe durchgeführt wurde, gab es für die Arbeitsaufträge feste Stationen an den Gruppentischen und die Kinder gingen von Auftrag zu Auftrag. Diese Aufgabenpräsentation hat den Vorteil, dass verbale Auseinandersetzungen unmittelbar an den Arbeitstischen geführt werden können.

Viele Kinder der 4. Klassen waren mit den vorliegenden Arbeitsblättern ausreichend gefordert. Bei den Leistungsstärkeren wäre eine Weiterführung mit Arbeitsblättern zu zwei und drei Faltlinien denkbar. Zu einer solchen Weiterarbeit an komplexeren Problemstellungen enthält das Buch umfangreiche weitere Anregungen.

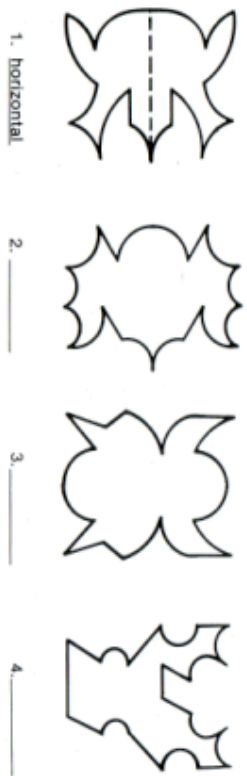
## Literatur

- Anderson, J. R. (1989): *Kognitive Psychologie – Eine Einführung*. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft. 2. Aufl.
- Augustinus, A. (1982): *Bekenntnisse. Eingeleitet und übertragen von Wilhelm Thimme*. München: Kösel. 7. Aufl.
- Besuden, H. (1974): Die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens in der Grundschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 45-49. Hannover: Schroedel
- Besuden, H. (1984): Die Aufgabe der Geometrie in der Grundschule. Illustriert am Einsatz eines Arbeitsmittels. *Knoten, Würfel, Ornamente. Aufsätze zur Geometrie in Grund- und Hauptschule*, 34-43. Stuttgart: Klett
- Davidson, P. S./ Willcutt R. E. (1984): *Spatial Problem Solving with Paper Folding and Cutting*. Cuisenaire Company of America, Inc. New York: Cuisenaire Company of America
- Frostig, M. (1977): *Visuelle Wahrnehmungsförderung*. Dortmund. 2. Aufl.
- Maier, P. H. (1996): Ist das räumliche Vorstellungsvermögen trainierbar? *Grundschule H. 3*, 9-11.
- Radatz, H./ Rickmeyer, K. (1991): *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel
- Wölpert, H. (1983): Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht*, 29, 7-42.

### Aufgabe 1

### Finde die Faltnie

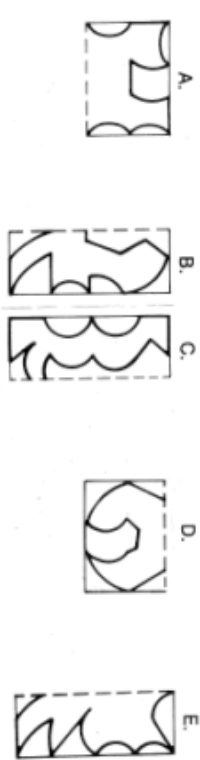
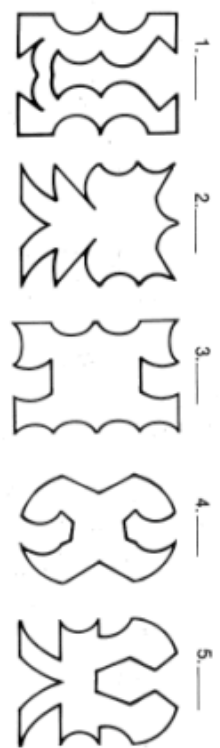
Finde die Faltnie und zeichne sie ein. Schreibe senkrecht, waagrecht oder keine neben jede Zahl. Bei Nr. 1 siehst du ein Beispiel.



### Aufgabe 3

### Welche Figuren gehören zusammen

Jedes Muster in der oberen Hälfte ist aus einer Faltnie der unteren Hälfte entstanden. Ordne die Muster den Faltniefiguren zu. Schreibe die passenden Buchstaben hinter die Nummern.

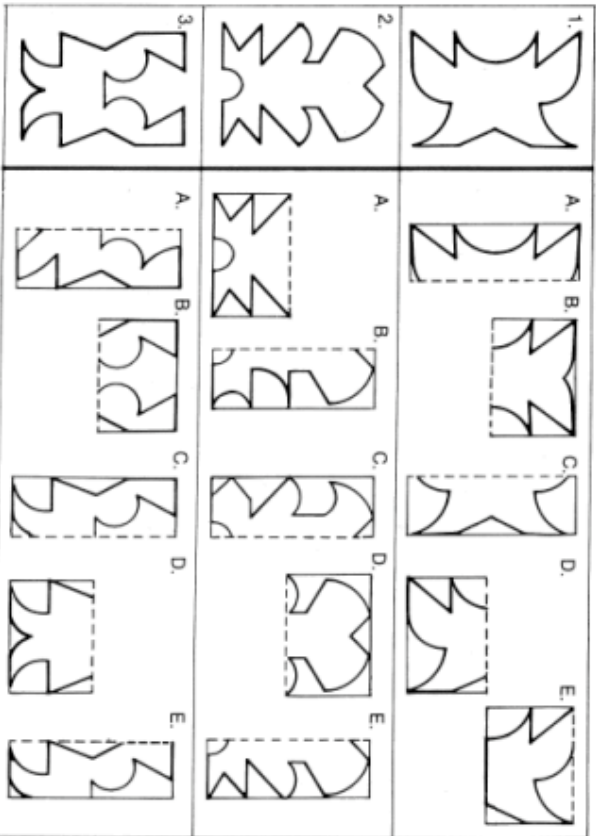


### Aufgabe 2

### Finde die passende Faltnie

Jedes Muster in der linken Spalte entsteht aus einer Faltnie.

Welche der fünf Faltniefiguren auf der rechten Seite ist die richtige zu dem Muster, das links abgebildet ist? Achte immer auch auf die eingezeichnete Faltnie.

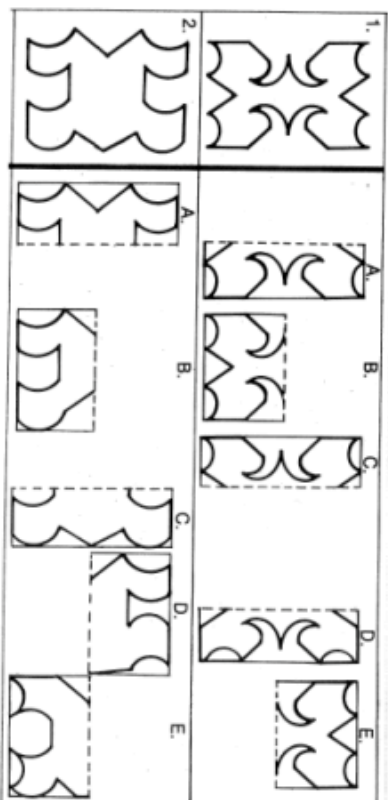


### Aufgabe 4

### Finde die passende Faltnie

Die Muster in der linken Spalte entstehen aus einer Faltnie.

Welche der fünf Faltniefiguren auf der rechten Seite ist die richtige zu dem Muster, das links abgebildet ist? Es kann mehrere Lösungen geben. Wenn keines der gefalteten Papiere das richtige Muster ergibt, schreibe keines auf. Achte immer auch auf die eingezeichnete Faltnie.

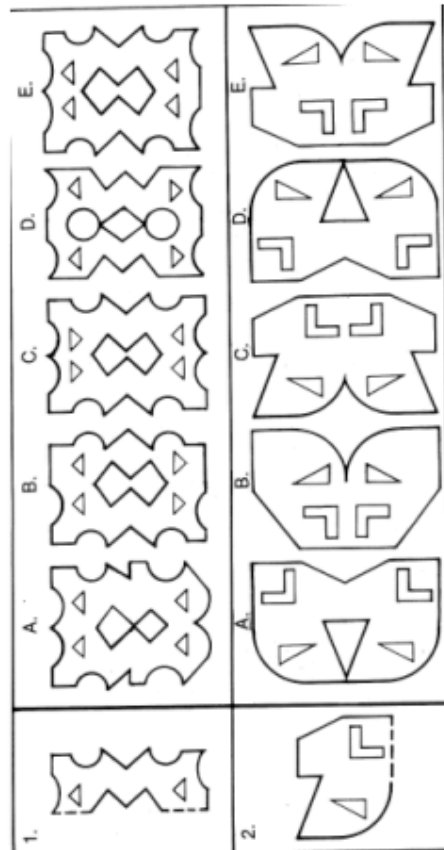




**Aufgabe 5**

**Finde das passende Muster**

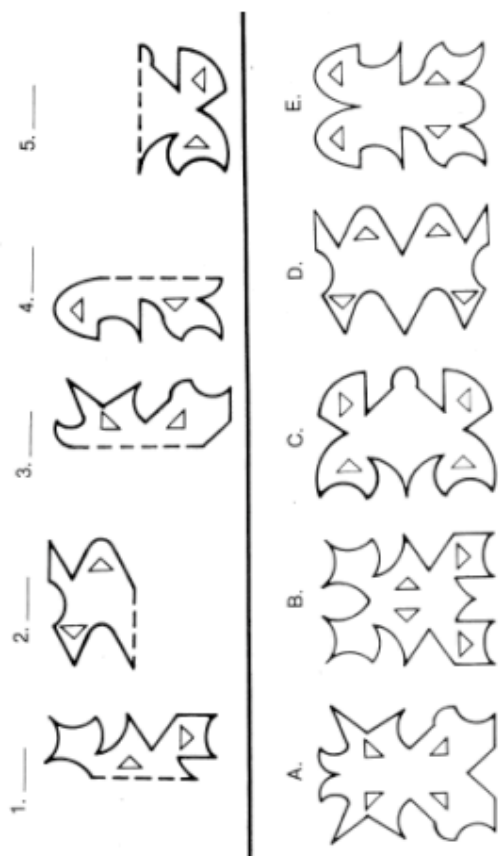
Die Faldfiguren in der linken Spalte ergeben aufgeklappt ein Muster der rechten Spalte. Welches der fünf Muster auf der rechten Seite ist das passende zu der linken Faldfigur.



**Aufgabe 6**

**Welche Figuren gehören zusammen**

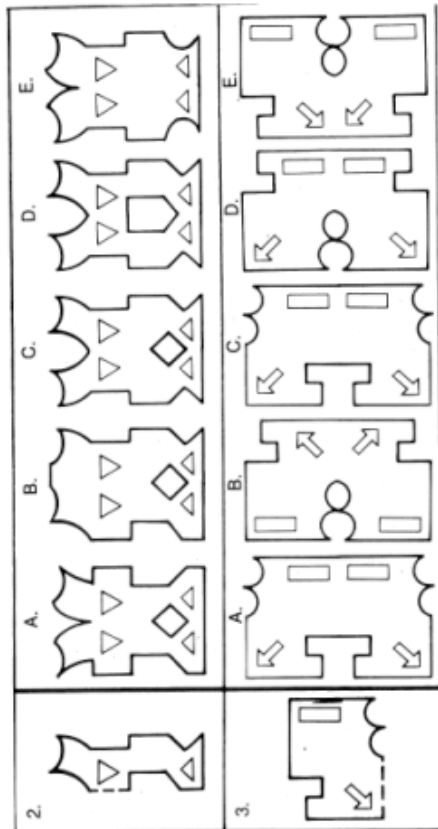
Jedes Muster in der unteren Hälfte ist aus einer Faldfigur der oberen Hälfte entstanden. Ordne die Faldfiguren den Mustern zu. Schreibe die passenden Buchstaben hinter die Nummern.



**Aufgabe 7**

**Finde das passende Muster**

Die Faldfiguren in der linken Spalte ergeben aufgeklappt ein Muster der rechten Seite. Welches der fünf Muster auf der rechten Seite ist das passende zu der linken Faldfigur.

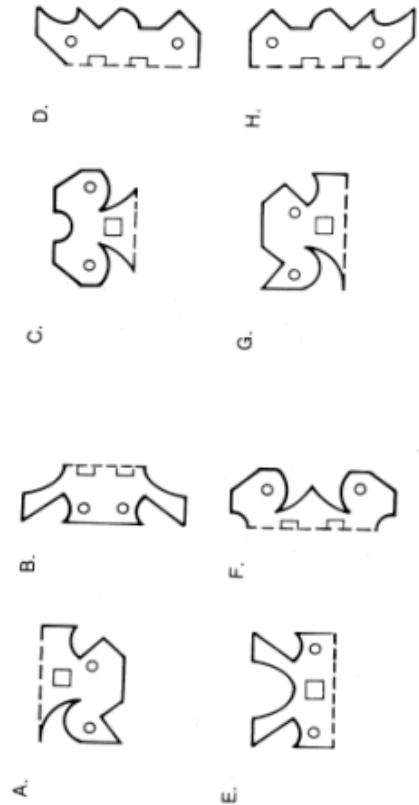


**Aufgabe 8**

**Welche Faldfiguren gehören zum gleichen Muster**

Jeweils zwei Faldfiguren ergeben das gleiche Muster. Schreibe die Buchstaben der gefalteten Stücke auf, die das gleiche Muster ergeben.

Beachte: Fast alle Muster haben zwei Falzlinien. Das bedeutet, dass auch eine linke Hälfte zu einer oberen Hälfte gehören kann.

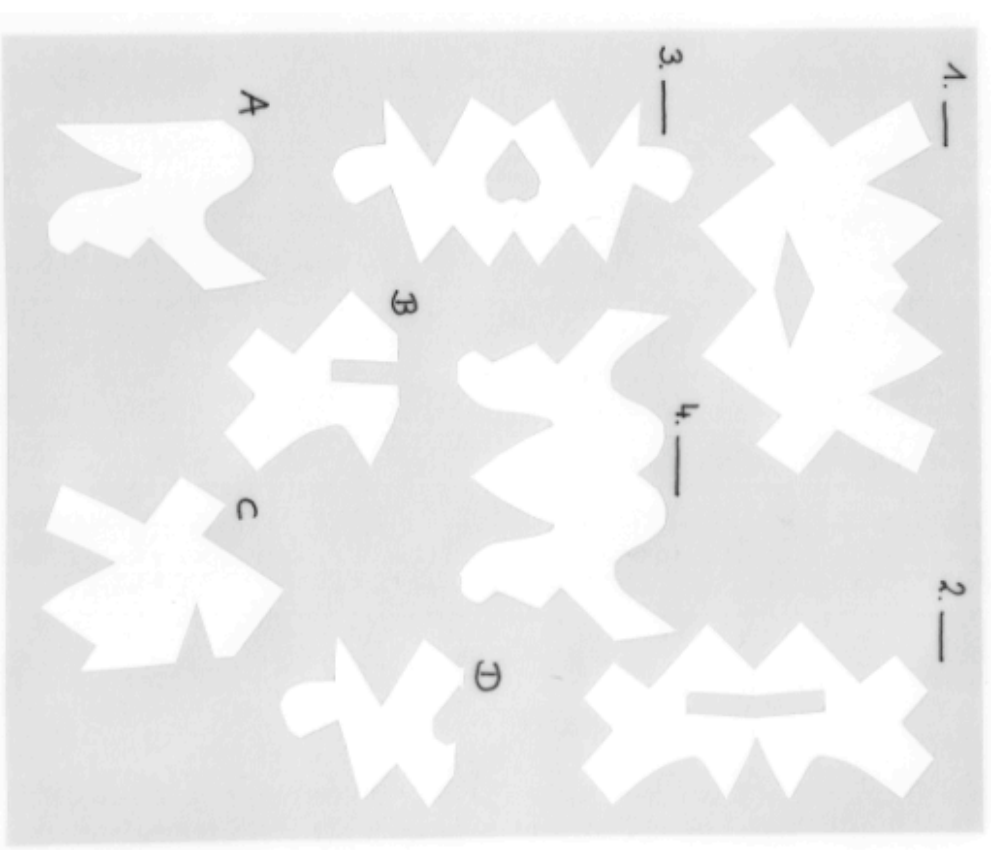


### Erstelle ein eigenes Arbeitsblatt I

Fertige selbst ein Arbeitsblatt an. Nimm als Vorlage **Aufgabe 6** oder **Aufgabe 3**.

Lege zwei Stücke Papier aufeinander und falte sie ein oder zwei Mal. Dann schneide eine Falzfigur aus. Klebe ein aufgefaltetes Muster auf die eine Hälfte des Arbeitsblattes. Schneide das andere Muster entlang der Falzlinie und klebe eine der beiden Teilfiguren auf die andere Hälfte des Arbeitsblattes. Zeichne eine gestrichelte Falzlinie ein. Wiederhole das ganze noch drei Mal.

Dein Arbeitsblatt sollte etwa so aussehen:

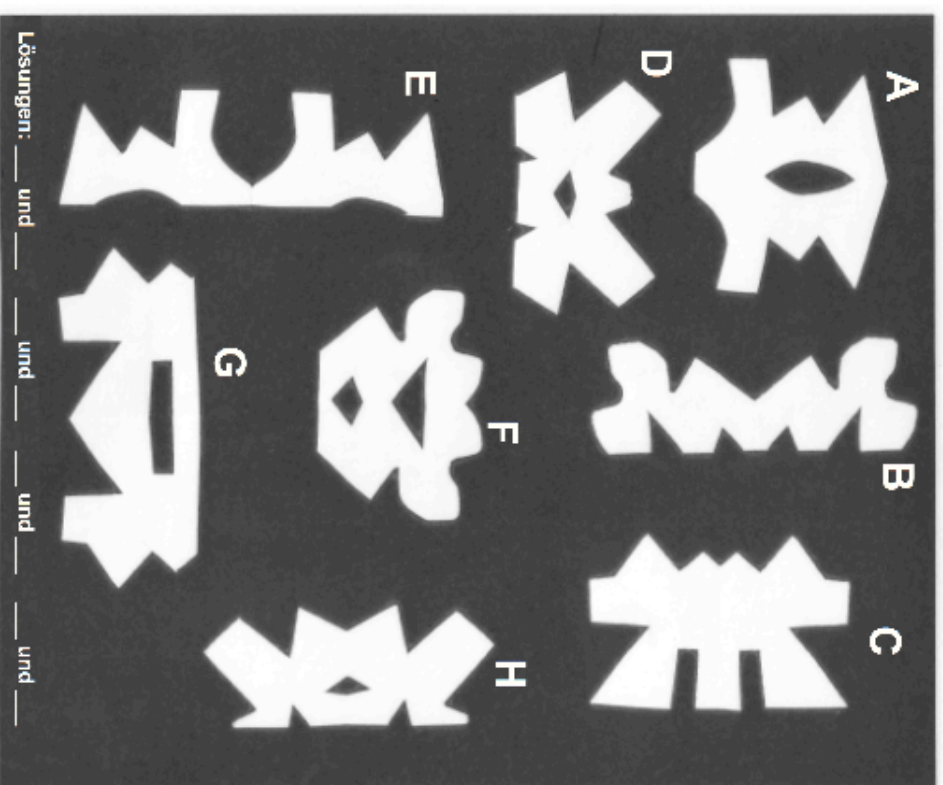


### Erstelle ein eigenes Arbeitsblatt II

Fertige selbst ein Arbeitsblatt an. Nimm als Vorlage **Aufgabe 8**.

Lege zwei Stücke Papier aufeinander und falte sie zwei Mal. Dann schneide eine Falzfigur aus. Schneide eine Falzfigur entlang der senkrechten Falzlinie und klebe eine der beiden Teilfiguren auf. Schneide die andere Falzfigur an der waagerechten Falzlinie auseinander und klebe eine der beiden Teilfiguren auf. Zeichne eine gestrichelte Falzlinie ein. Wiederhole das ganze noch drei Mal.

Dein Arbeitsblatt sollte etwa so aussehen:



Lösungen: \_\_\_\_\_ und \_\_\_\_\_ und \_\_\_\_\_ und \_\_\_\_\_